Inhaltsverzeichnis

Notizen

I.) UMKEHRAUFGABEN

1.) Eine Polynomfunktion 3.Grades, die durch den Ursprung geht, besitzt einen Wendepunkt $W(4/\frac{4}{3})$. Der Anstieg der Wendetangente beträgt k=-1 .

a.) Wie lautet die Funktionsgleichung?
b.) Diskutieren Sie die Funktion und fertigen Sie eine Zeichnung an
c.) Berechnen Sie die endliche Fläche zwischen x-Achse und Funktion

2.) Eine Polynomfunktion 3.Grades besitzt einen Wendepunkt W(1/0) und einen Tiefpunkt T(2/-2).

a.) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung und diskutieren Sie die Funktion
b.) Zwischen den beiden nicht-ganzzahligen Nullstellen und der x-Achse wird von der Funktion und der x-Achse ein endliches Flächenstück begrenzt. Berechnen Sie diese Fläche.
Die 3.Nullstelle ist ganzzahlig und gegeben, nämlich W(1/0) und liegt genau in der Mitte. Wieso würde sich für das eingeschlossene Flächenstück 0 ergeben, wenn man einfach bei der Integration die beiden Abszissenwerte der Nullstellen als Integrationsgrenzen verwenden würde.
Verallgemeinern Sie diese Situation!

3.) Eine Polynomfunktion 4.Ordnung hat im Ursprung einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente und im Punkt N(-4/0) eine weitere Nullstelle. Die Fläche, welche die Kurve mit der x-Achse begrenzt, hat das Flächenmaß 64/5.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
Diskutieren Sie die Kurve und zeichnen Sie den Graphen der Funktion zwischen den beiden Nullstellen.
Wie lautet die zweite Lösung?

4.) Eine Polynomfunktion 4.Ordnung schneidet die x-Achse an den Stellen 0 und 2 ; an der Stelle 1 liegt ein Wendepunkt mit der Wendetangente $2x + y - 1 = 0$ vor.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.
Diskutieren Sie die Kurve und zeichnen Sie den Graphen der Funktion.
Berechnen Sie die endliche Fläche zwischen x-Achse und Funktion

5.) Der Graph einer Polynomfunktion 4.Ordnung hat im Ursprung einen Wendepunkt mit der x-Achse als Wendetangente; im Punkt P(-1/ ¾) hat die Steigung der Tangente den Wert -2.

Diskutieren Sie die Funktion und fertigen Sie eine Zeichnung an!
Berechnen Sie die endliche Fläche zwischen x-Achse und Funktion.

6.) Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades besitzt einen Wendepunkt W(-1/2) und den Punkt P(1/4). In P besitzt die Tangente den Anstieg $k=9$.

Wie lautet der Funktionsterm?
Man diskutiere die Funktion und fertige eine Zeichnung an..

7.) Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades besitzt den Tiefpunkt T(0/0) und den Wendepunkt W(1/1) mit zur x-Achse paralleler Tangente.
Wie lautet der Funktionsterm?
Man diskutiere die Funktion.

8.) Der Graph der Polynomfunktion 3.Grades hat im Punkt W(½ / 0) einen Wendepunkt. Die Wendetangente besitzt den Anstieg $k= - 9/2$. Die Fläche, die von den beiden Achsen und dem Kurvenstück zwischen der Ordinatenachse und dem Wendepunkt begrenzt wird, hat den Inhalt $\frac{17}{32}$.

Man ermittle die Funktionsgleichung und diskutiere die Funktion!

9.) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung einer Polynomfunktion 3.Grades, deren Graph im Ursprung den Wendepunkt und in P(2/ $\frac{2}{3}$) die Steigung 3 hat.

a.) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen
b.) Berechnen Sie den Flächeninhalt des vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossenen Flächenstückes.
c.) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

10.) Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt den Extremwert E(3/ y) und hat in W(2/y_w) den Wendepunkt. Die Gleichung der Wendetangente lautet $3x + y = 4$.

a.) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung
b.) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen
c.) Das vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossene, endliche Flächenstück rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

11.) Eine Polynomfunktion dritten Grades geht durch den Punkt P(-3/-1) und besitzt einen Wendepunkt W(1/1) und eine in Q(3/y) horizontale Tangente.

a.) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung
b.) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen
c.) Das vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossene, endliche Flächenstück rotiert um die x-Achse.Berechnen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

12.) Der Graph der Funktion f: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat die Nullstelle N(4/0), einen Wendepunkt W(2/2) und besitzt bei $x=0$ eine horizontale Tangente.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung und diskutieren Sie die Funktion!

Lösungen:

1.)a.) $y = 1/12x^3 - x^2 + 3x$

b.) Nullstellen: N(0/0), N(6/0)
Extremwerte:
T(6/0), H(2/$\frac{8}{3}$)
Wendepunkt:
gegeben

Symmetrie:
weder gerade noch ungerade

c.) Fläche: 9 FE

2.)a.) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

Nullstellen: N(1/0) = W, N(2,73/0), N(-0,73/0)

Extremwerte:
H(0/2),T(2/-2)

Wendepunkt: gegeben

Symmetrie: weder noch

Wertetabelle: selber

b.) A=4,5 FE

3.) Funktion: $y = -\frac{1}{4}x^4 - x^3$
Nullstellen: Gegeben

Extremwerte: H(-3/6,75)

Wendepunkte: W1(0/0), W2(-2/4)

Symmetrie: weder noch

Wertetabelle, Zeichnung

2.Lösung: $y = \frac{1}{4} x^4 + x^3$

4.) $y = x^4 - 2x^3$

Nullstellen: (0/0), (2/0)

Extremwerte: $T\left(\frac{3}{2} / -\frac{27}{16}\right)$

Wendepunkte: (0/0), (1/-1)

Wendetangenten: $y = 0$ und $y = -2x + 1$

Symmetrie: weder noch

Zeichnung, Wertetabelle

5.) Funktionsgleichung: $y = -\frac{1}{4} x^4 - x^3$

Nullstellen: (0/0), (-4/0)

Extremwerte: H(-3/ 6,75)

Wendepunkte: (0/0), (-2/4)

Wendetangenten: $y = 0$ und $y = -4x - 4$

Symmetrie: weder noch

Wertetabelle und Zeichnung

6.) $y = x^3 + 3x^2$

Nullstellen: N(0/0) , N(-3/0)

Extremwerte: T(0/0)=N , H(-2/4)

Wendepunkt: W(-1/2)

Symmetrie: weder noch

Zeichnung und Wertetabelle

7.) $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Nullstellen: (0/0)

Extremwerte: T(0/0) = N

Wendepunkte: $W_1\left(\frac{1}{3} / \frac{11}{27}\right)$, $W_2(1/1)$

Symmetrie: weder noch

Wertetabelle und Zeichnung

8.) $y = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$

Nullstellen: (-1/0), W , (2/0)

Extremwerte:T(1,82/-7,37), H(-0,82/1,34)

Wendepunkt: gegeben

Symmetrie: weder noch

Wertetabelle und Zeichnung

9.) $y = \frac{x^3}{3} - x$

Buch S 163. K2

Nullstellen: (0/0), $(\pm\sqrt{3} / 0)$

Extremwerte: T($1/-\frac{2}{3}$) ; H($-1/\frac{2}{3}$)

Wendepunkt: (0/0)

Symmetrie: ungerade Funktion

Wertetabelle

b.) A = 1,5

c.) V= 2,49

10.) a.) Funktionsgleichung

$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

b.) Nullstellen: (1/0) , (4/0)

Extremwerte: H (1/0) , T(3/-4)

Wendepunkt: W(2/-2)

Symmetrie: Bezüglich des Wendepunktes

Wertetabelle:

Graph: B.S. 165 K4

c.) V = 65,4

11.) y = $\frac{1}{8}(x^3 - 3x^2 - 9x + 19)$

a.) Nullstellen: Newton:
(1,69/0), (4,1/0), (-2,8/0)

Extremwerte: T(3/-1), H(-1/3)

Wendepunkt W(1/1)

Symmetrie: bez. W

Wertetabelle

Graph Seite 167 Nr. K4

b.) A = 10

c.) V=66,49

12.) Funktionsgleichung: y= $0{,}125x^3 - 0{,}75x^2 + 4$

Nullstellen: N(-2/0), N(4/0)

Extremwerte: T(4/0), H(0/4)

Wendepunkte: W(2/2)

Symmetrie: bez. W

Graph und Wertetabelle

II.)KURVENDISKUSSION

1.) Gegeben ist die Funktionsgleichung $y = \frac{x^3}{2 \cdot x^2 - x - 1}$

a.) Diskutieren Sie die gegebene Funktion und fertigen Sie eine Zeichnung an
b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der schrägen Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

2.) Diskutieren Sie die folgende Funktion und zeichnen Sie den Graphen:

$$y = \frac{4 + 3x - x^2}{2x + 4}$$

3.)a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der schrägen Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

4.) Gegeben ist die Funktion: $y = \frac{4}{1 + x^2}$

a.) Diskutieren Sie die Funktion
b.) Der Fläche zwischen Kurve und Abszissenachse ist das flächengrößte Rechteck derart einzuschreiben, dass eine Seite auf der x-Achse und die beiden anderen Eckpunkte Punktgraphen der Funktion sind.

5.) a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x}{x^2 - 16}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der waagrechten Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von waagrechten Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

6.) a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{4x}{x^2+1}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der waagrechten Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von waagrechten Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

7.) a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{3-x^2}{x^2-4}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Zeigen Sie, dass es keinen Schnittpunkt der Funktion mit der waagrechten Asymptote gibt. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von waagrechten Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

8.) a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der waagrechten Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

9.) a.) Diskutieren Sie die Funktion mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x^3}{x^2+x-6}$ und zeichnen Sie den Graphen.

b.) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Funktion mit der schrägen Asymptote. Erklären Sie, warum eine Asymptote eine Funktion schneiden kann!
Wie lautet die allgemeine Bedingung für das Auftreten von schrägen Asymptoten bei gebrochen rationalen Funktionen?

10.) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{x^3-4x}{1-x^2}$

Die Funktionskurve ist zu diskutieren.
Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Nullstellen.

11.) Diskutieren Sie die Funktion $y = \frac{x^3}{x^2 - 16}$ und zeichnen Sie Ihren Graphen.

12.) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x}{x^2 - 16}$

Diskutieren Sie die Funktion und fertigen Sie eine Zeichnung an!

13.) Gegeben ist die Funktion $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$

Diskutieren Sie die Funktion und fertigen Sie eine Zeichnung an!

Lösungen:

1a.) D=R\{-1/2 ,1} Polstellen bei -1/2 und 1
schräge Asymptote: y= x/2 + ¼
Nullstelle: N (0/0)
Extremwerte: Achtung bei x=0 kein Extremwert, T(1,82/1,58), H(-0,82/-0,47)
Wendepunkte: W(0/0)
Symmetrie: keine
Wertetabelle: selber
S(-1/3 / 1/12)

2.) D=R\{-2} Polstelle bei x=-2

Nullstellen: N(4/0), N(-1/0)

Extremwerte:
H(0,45/1,05),T(-4,45/5,95)

Keine Wendepunkte

keine Symmetrie

Verhalten im Unendlichen: $y= -\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$

Wertetabelle

3.) a.) D=R\{1} Pol bei 1

Nullstellen: N(0/0)

Extremwerte: $T(3/\frac{27}{4})$

Wendepunkt: W(0/0)

Asymptote: y= x + 2

Symmetrie: keine

Wertetabelle und Zeichnung

b.) $S\left(-\frac{4}{3} / \frac{8}{3}\right)$

4.) a.) D=R keine Pole

Keine Nullstellen

Extremwerte: H(0/4)

Wendepunkte: $W\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3} / 3\right)$

Symmetrisch zur y-Achse

Asymptote: x-Achse

Wertetabelle und Zeichnung

b.) Quadrat a=b=2

5.) D = R\ { .-4, 4} ,
Polstellen bei -4 und 4

Nullstelle: (0/0)

Extremwerte: Keine

Wendepunkt: (0/0)

Symmetrie: bez. des Urspungs

Verhalten im Unendlichen: y = 0

Wertetabelle und Zeichnung

Nr. 500 a

6.) D = R , keine Polstellen

Nullstellen: (0/0)

Extremwerte: T(-1/-2) , H(1/2)

Wendepunkte: (0/0), $\left(\pm\sqrt{3} / \pm\sqrt{3}\right)$

Symmetrie: bezüglich des Ursprungs

Asymptote: y = 0

Wertetabelle und Zeichnung:

500b

7.) D = R\{-2, 2 } , Polstellen bei 2 und -2

Nullstellen: $\left(\pm\sqrt{3} / 0\right)$

Extremwerte: T(0/-0,75)

Wendepunkte: keine

Symmetrie: bezügl. der y-Achse

Asymptote: y = -1

Wertetabelle und Zeichnung:

501b

8.) D = R\{ - 1 } , Polstellen bei x = -1

Nullstellen: (0/0), (2/0)

Extremwerte: T(0,5/ $-\frac{1}{3}$)

Wendepunkte: $\left(\frac{5}{4} / -\frac{5}{27}\right)$

Symmetrie: keine

Asymptote: y = 1

Wertetabelle und Zeichnung:

502c

9.) D = R\{ -3, 2 } , Polstellen bei -3 und 2

Nullstellen: (0/0)

Extremwerte:

H(-5,36/-8,87) , T(3,36/4,39)

Wendepunkte: (0/0)

Symmetrie: keine

Asymptote: y = x - 1

Wertetabelle und Zeichnung:

504a

10.) D = R\{1,-1}

Nullstellen: (-2/0), (0/0) = W, (2/0)

Extremwerte:

Wendepunkt: (0/0)

t1: y= -4x

t2: y = $-\frac{8}{3}(x-2)$

t3: y = $-\frac{8}{3}(x+2)$

Wertetabelle und Zeichnung

11.) $D = R\backslash\{ 4, -4 \}$ Asymptoten parallel zur y-Achse bei $x=4$ und $x=-4$

Nullstellen: N(0/0)

Extremwerte:
T(6,93/10,39), H(-693/-10,39)

Wendepunkt: (0/0)

Symmetrie: symmetrisch bezüglich des Ursprungs

Schiefe Asymptote: $y = x$

Wertetabelle und Zeichnung

K23 S. 204

12.) $D = R\backslash\{4,-4\}$, Polstellen bei 4, -4

Nullstellen: (o/o), N(3,45/0), N(-1,45/0)

Extremwerte:

Wendepunkte:

Symmetrie: keine

Asymptote: $y=x+2$

Wertetabelle und Zeichnung:

13.) $D = R\backslash\{-3,3 \}$, Polstellen bei $x=-3$, 3

Nullstellen: N(0/0)

Extremwerte: H=N

Wendepunkte:

Symmetrie:

Asymptote:

Wertetabelle und Zeichnung:

III.)INTEGRALRECHNUNG

1.) Ein zylindrisches Gefäß mit einem Innendurchmesser von 9cm ist bis zu einer Höhe von 8cm mit Wein gefüllt. Der Wein wird in Gläser gegossen. Jedes Glas hat die Form eines Drehparaboloids ($x^2 = 2py$) von 6cm Höhe und 6cm Durchmesser.

a.) Wieviele Gläser können bis 1cm unter dem Rand gefüllt werden?
b.) Wie hoch steht der Wein in jenem Glas, in das der Rest geleert wird?

2.) Eine asymmetrische Linse entsteht durch Drehung jenes Flächenstückes um die x-Achse, das von den Graphen von E: $3x^2 + 4y^2 = 300$ und H: $16x^2 - 9y^2 = 144$ eingeschlossen wird. (Einheiten in cm!)

Berechnen Sie das Gewicht der Linse, wenn das Glasmaterial die Dichte von 2,67 kg/dm³ aufweist.

3.) Ein Glas wird innen von einem halben, einschaligen Hyperboloid erzeugt. Der Radius des Basiskreises besitzt einen Radius von 5cm, die Höhe des Innenraumes beträgt 3cm, der obere Innenradius 7cm.

a.) Berechnen Sie das Fassungsvermögen, wenn die Füllmarke 0,5cm unterhalb des oberen Randes liegt.
b.) Bei wie vielen Gläsern hat der Ober eine Flasche (O,7 Liter) eingespart, wenn er beim Einschenken stets 3mm unterhalb der Füllmarke bleibt?

4.) Der Längsschnitt durch ein Ei ist ein Oval. Dieses Eiprofil lässt sich näherungsweise durch eine Halbellipse (a=32mm, b=22mm) und einen Halbkreis (r=b=22mm) annähern.

a.) Berechnen Sie das Gewicht, wenn die mittlere Dichte 1,2g/cm³ beträgt
b.) Durch welchen Schnitt (Parallel zur y-Achse) kann das Ei in zwei volumsgleiche Teile zerlegt werden. (Die auftretende Gleichung ist mit Hilfe des Newton´schen Näherungsverfahrens zu lösen)

5.) Eine Kette besteht aus unendlich vielen hyperboloidförmigen Perlen, die durch Drehung der gleichseitigen Hyperbeln (a=b) um die y-Achse entstehen, und kugelförmigen Zwischenstücken. Das erste Stück ist eine Kugel mit dem Radius r=a, dann folgt ein hyperboloidförmiges Stück mit a=b, dann eine Kugel mit a/2, ein hyperboloidförmiges Stück mit a/2, usf.

a.) Berechnen Sie die Länge der Kette (a=25mm)
b.) Berechnen Sie das Gewicht der Kette, wenn die mittlere Dichte bei 1,5 g/cm³ liegt

6.) Ein Weinglas mit der Höhe $h=5cm$ hat die Form eines Drehhyperboloids, das durch Drehung der Hyperbel $H: x^2 - y^2 = 9$ um die y-Achse im 1. und 2. Quadranten entsteht.

a.) Berechnen Sie das Volumen
b.) In das Weinglas wird ¼ l Wein gegossen. Wie hoch steht der Wein im Glas ? (Die dabei auftretende Gleichung ist mit Hilfe des Newton´schen Näherungsverfahrens auf 3 Kommastellen genau zu berechnen)
c.) Welche Punkte der Hyperbel besitzen den kürzesten Abstand zum Punkt P(5/0) ?

7.) Man beweise: Legt man durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel mit den Halbachsen $a=3$ und $b=2$ Parallelen zu den Asymptoten, so bilden diese Parallelen mit den Asymptoten ein Parallelogramm, dessen Flächeninhalt von der Wahl dieses Punktes unabhängig ist. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

8.) Eine gleichseitige Hyperbel in Hauptlage geht durch den Punkt P(5/3). Durch P geht eine Ellipse, deren Halbachsen a und b sich wie 5:3 verhalten.

Wie lauten die Gleichungen der beiden Kegelschnitte?
Der Hyperbelbogen zwischen x-Achse und P sowie der Ellipsenbogen zwischen y-Achse und P begrenzen im 1.Quadranten mit den Koordinatenachsen ein Flächenstück. Man berechne das Volumen des Drehkörpers, der bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht!

9.) Die Parabel $y^2 = 16x$ wird von der Geraden $2x - y = 16$ geschnitten.

Dem entstehenden Parabelsegment soll ein Dreieck mit größtem Flächeninhalt so eingeschrieben werden, dass eine Dreiecksseite die Parabelsehne ist.
In den Eckpunkten dieses Dreiecks werden die Tangenten an die Parabel gelegt. Es ist zu zeigen, dass der Flächeninhalt des von diesen Tangenten gebildeten Dreiecks halb so groß ist wie der Flächeninhalt des anderen Dreiecks!

10.) Der Achsenschnitt eines Stromlinienkörpers ist durch die Gleichung $16y^2 = x(4 - x)^2$ im Intervall $[0; 4]$ gegeben.

Man zeige: Die y-Achse ist Tangente dieser Kurve im Ursprung.
Man berechne den Inhalt der Schnittfläche und das Volumen des Drehkörpers!

11.) Gegeben sind die beiden Parabeln $p1: y = 4 - x^2$ und $p2: y = \frac{1}{15} \cdot x^2$

Zeige, dass sich beide Kurven rechtwinklig schneiden.
Wie groß ist das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation des umschlossenen Flächenstücks um die y-Achse entsteht?

12.) Die von der Kurve $y = 8 - \frac{x^2}{2}$ und den Koordinatenachsen im ersten Feld begrenzte Fläche rotiert um die y-Achse.
Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?
Die Fläche soll durch eine Parallele zur y-Achse halbiert werden. Wo ist sie zu ziehen? (Die auftretende Gleichung dritten Grades ist mit Hilfe des Newton´schen Näherungsverfahrens zu lösen) Wie lang ist diese Halbierungslinie?

13.) Ein Glasbecher hat außen die Form eines Kegelstumpfes und ist 15cm hoch; die äußeren Kreisdurchmesser sind 10cm bzw. 6cm lang. Die Höhlung hat die Form eines Drehparaboloids, das an der Öffnung 9,6cm breit ist und eine Tiefe von 14,6cm hat.

Man berechne den Inhalt des Bechers.
Was wiegt der Becher, wenn das spezifische Gewicht 2,6g/cm³ beträgt?

14.) Wie lautet die Gleichung des Kreises, der die x-Achse und die beiden Äste der Hyperbel H: $16x^2 - 9y^2 = 256$ berührt?

Drehen sich Kreis und Hyperbel im positiven y-Bereich um die y-Achse, so entsteht eine Schale, in der eine Kugel liegt. Wie hoch steht die Schmelzflüssigkeit in der Schale, wenn die Kugel geschmolzen wird? (Die auftretende Gleichung dritten Grades soll mit Hilfe des Newton´schen Näherungsverfahrens gelöst werden)

15.) Eine Vase besteht im unteren Teil aus einer Halbkugel, die im oberen Teil durch ein Paraboloid fortgesetzt wird. Gegeben sind die inneren Maße: Basisdurchmesser 10cm, Durchmesser des oberen Randes 12cm, Gesamthöhe 16cm. Der Scheitel des Paraboloids ist im Kugelmittelpunkt.

Wie hoch steht in dieser Vase 1 Liter Wasser ?

16.) In ein parabolisches Gefäß, das 16cm hoch ist und oben einen Durchmesser von 16cm hat, wird eine Kugel von r=6cm bis zur Berührung hineingelegt.

Wie groß ist der Raum zwischen den beiden Körpern?

17.) Eine mit Wasser gefüllte Vase hat die Form eines einschaligen Drehhyperboloids, das durch die Drehung der Kurve $5x^2 - y^2 = 95$ von y=-25 bis y=+25 um die Ordinatenachse entstanden ist. Auf die Vase wird eine Kugel gelegt, die längs des oberen Randkreises des Hyperboloids berührt.

Wieviel Wasser bleibt nach dem Einlegen der Kugel in der Vase zurück?

18.) Der Hohlraum eines Weinglases ist im wesentlichen ein Rotationsparaboloid. Das Glas ist 6cm tief und hat 6cm Öffnungsdurchmesser.
Wieviel Wein ist enthalten, wenn das Glas gestrichen voll ist bzw. wenn es bis zur halben Höhe gefüllt ist ?
In welcher Höhe müsste die Markierung für 1/16 Liter angebracht werden?

19.) Ein Tequilaglas hat die Form eines Drehzylinders der parabolisch ausgehöhlt ist. Der Durchmesser des Glases beträgt 6cm, die Innenhöhe 5cm und die Gesamthöhe 6cm.

a.) Berechne das Gewicht des Glases, wenn 1dm³ Glas 1,8kg wiegt!
b.) Wie groß ist das Fassungsvermögen?
c.) Wo muss die Marke für $\frac{1}{16}$l angebracht werden?

20.) Gegeben ist die Parabel P: $y^2 = 24x$ und die Gerade g: $y = -2x + 24$

a.) Berechne die Schnittpunkte
b.) In den Schnittpunkten werden Tangenten gelegt. Wie groß ist die Fläche, die zwischen den Tangenten und der Parabel liegt ?
c.) Berechne die Fläche des Parabelsegmentes

21.) Gegeben: Ellipse E: $4x^2 + 9y^2 = 36$

und die Hyperbel H: $4x^2 - 3y^2 = 12$

Die kleinere Fläche, die von der Ellipse und der Hyperbel eingeschlossen wird, dreht sich um die y-Achse. Berechne das Volumen!

22.) Ein Gefäß von der Innenform eines Drehparaboloids hat eine Höhe von 10cm und einen oberen Durchmesser von 18cm.

a.) Wieviel Liter fasst das Gefäß?
b.) Wie hoch steht darin 1 Liter Flüssigkeit?

23.) Gegeben ist der Kreis K: $(x - 2)^2 + y^2 = 25$

Der Kreis wird durch die y-Achse in zwei Kreissegmente unterteilt. Das rechts von der y-Achse liegende Segment dreht sich um die x-Achse.

a.) Berechne das Volumen des entstehenden Kugelabschnittes
b.) Wo ist eine Parallelebene zur y-Achse zu ziehen, dass dieser Kugelabschnitt in zwei volumsgleiche Kugelteile unterteilt wird? (Die dabei auftretende Gleichung dritten Grades ist mit Hilfe des Newton´schen Näherungsverfahrens zu lösen)

24.) Gegeben sind die Hyperbel H: $x^2 - y^2 = 16$ und die Ellipse E: $9x^2 + 25y^2 = 450$

Das Flächenstück, das von den Koordinatenachsen, Ellipsen- und Hyperbelbogen im 1 Quadranten begrenzt wird, rotiert um die x-Achse.
Berechnen Sie das Volumen!

25.) Das Flächenstück, das von der Ellipse E: $9x^2 + 16y^2 = 144$ und der Geraden g: $3x + 4y = 12$ begrenzt wird, rotiert um die x-Achse.

Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

26.)Der Brennpunkt eines Rotationsparaboloids, das durch Drehung der Parabel $y^2 = 8x$ um die x-Achse entstanden ist, ist Mittelpunkt einer Kugel vom Radius $r = 6$.

In welchem Verhältnis stehen die Volumina der Kugelteile, in die die Kugel durch das Rotationsparaboloid geteilt wird?

27.) Gegeben sind die Parabeln P1: $y^2 = 16(x - 4)$ und P2: $y^2 = 8x$

a.) Berechnen Sie das gemeinsame endliche Flächenstück
b.) Berechne das Raummaß des entstehenden Drehkörpers bei Drehung um die x-Achse und um die y-Achse!

28.) Die beiden Kurven $7x^2 + 16y^2 = 112$ und $5x^2 - 4y^2$ begrenzen mit der x-Achse im 1. Quadranten ein Flächenstück. Dieses eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse.

a.) Berechnen Sie das Volumen
b.) Wo ist eine Parallelebene zur y-Achse zu legen, damit dieses Volumen in zwei volumsgleiche Teile unterteilt wird? (Die auftretende Gleichung dritten Grades ist durch das Newton´sche Näherungsverfahren zu lösen)

29.) Die Ellipse in Mittelpunktslage mit $a = 5$ und $b = 3$ begrenzt mit der Parabel $y^2 = -4(x-5)$ und den Koordinatenachsen im 1.Quadranten ein Flächenstück.
Dieses Flächenstück rotiert um die
a.) x- Achse
b.) y-Achse

Berechnen Sie jeweils das Volumen des entstehenden Drehkörpers!

Lösungen:

1.)a.) 8 Gläser b.) 4cm

2.) Schnittpunkte: S(+-6/+-)

Volumen : 0,528 dm^3

Gewicht: 1,41kg

3.) a.) Hyperbel : $3x^2 - 8y^2 = 75$

Volumen: 240cm^3

b.) Nach 19 Gläsern

4.) a.) E: $22^2x^2 + 32^2y^2=22^2 32^2$

K: $x^2 + y^2 = 22^2$

Volumen: 32438+22301 mm^3=54,74 cm^3

Masse: 65,7g

b.) Parallele bei x=-3,3 mm

5.) a.) Länge = 200 mm

b.) Volumen=224 cm^3

Gewicht =336 g

6.)a.) 272 cm^3

b.) Höhe=4,784cm

c.) $P\left(\frac{\pm\sqrt{61}}{2} / \frac{5}{2}\right)$

7.) A= 3

8.) H: $x^2 - y^2 = 16$

E: $9x^2 + 25y^2 = 450$

Volumen = 222

9.) 54 und 108 FE

10.) A= 64/15

$V=\frac{4\pi}{3}$

11.) V = 23,56

12.) Volumen = 201,06

x = 1,389

Länge = 7,035

13.) V= 528 cm³

Masse=627g

14.) u=0 , v = r =5

Kreisgleichung: $x^2 + y^2 - 10y = 0$

Höhe der Schmelze: 6,89 cm

15.) 15,14 cm

16.) $V= \frac{160\pi}{3}$

17.) V= 2372 □

18.) 84,8 cm³

21,2cm³

5,15cm

19.)

20.)a.) S1(6/12), S2(24/-24)
b.) 162,01 FE
c.) 323,99FE

21.) 8π

22.)a.) 1,27 l
b.) 8.86 cm

23.)

24.)70,6π VE

25.)12π

26.) Kreisgleichung: $(x - 2)^2 + y^2 = 36$

$S_{1,2}(4 | \pm 4\sqrt{2})$

Volumen(Paraboloid) = 64π

Volumen(Kugelabschnitt) = $\frac{224}{3}\pi$

Verhältnis 13:14

27.)a.) 42,6 FE
b.)128π VE bzw. 273,06π VE

28.) a.)

b.)

29.) a.)

b.)

IV.)EXTREMWERTAUFGABEN

1.) Die Parabeln P1: $y^2 = 3x$ und P2: $y^2= 40 -5x$ schließen ein gemeinsames Flächenstück ein.

a.) Berechnen Sie die gemeinsame Fläche
b.) Dem Rotationskörper, der durch Drehung dieses Flächenstückes um die x-Achse entsteht, ist ein koaxialer Zylinder von maximalem Volumen einzuschreiben. In welchem Verhältnis steht das Zylindervolumen zum Volumen des Rotationskörpers?

2.) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabel P: $y^2=24x$ mit der Geraden g: $y=-2x +24$

In diesen Schnittpunkten werden die Tangenten an die Parabel gelegt.
Berechnen Sie die Fläche, die von der Parabel und den Tangenten eingeschlossen wird.
Die beiden Schnittpunkte sind Eckpunkte eines flächengrößten Dreiecks, das der Parabel eingeschrieben werden kann. Wie lauten die Koordinaten des dritten Eckpunktes?

3.) a.) Man bestimme den Flächeninhalt des Flächenstückes, das die Gerade g: $y= x + 1$ von der Parabel P: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3$ abschneidet.
b.) Die beiden Schnittpunkte aus Aufgabe a.) sind die Eckpunkte eines flächengrößten Dreiecks, das dem Parabelabschnitt einbeschrieben werden kann. Wie lauten die Koordinaten des dritten Eckpunktes?

4.) Gegeben ist die Parabel $y^2 = 4x$ und die Gerade mit der Gleichung $x=4$.

Der Parabel ist ein Rechteck derart einzubeschreiben, dass eine Seite auf der gegebenen Geraden liegt und je ein weiterer Eckpunkt auf der Parabel.
Wie muss dieses Rechteck eingeschrieben werden, damit bei Rotation um die Abszissenachse ein Zylinder von größtmöglichem Volumen entsteht?
Wie verhält sich das Volumen des Zylinders zu jenem des Paraboloids?
Durch das einbeschriebene Rechteck wird das Parabelsegment in drei Teile zerlegt. Wie groß sind deren Flächeninhalte?

5.) Bestimmen Sie auf der Kurve k1: $y = \frac{x^2}{4}$ jenen Punkt Q, der vom Punkt P (1/2) den geringsten Abstand besitzt.

Durch diesen Punkt Q verläuft eine Parabel k2, deren Scheitel im Ursprung liegt und deren Achse mit der x-Achse zusammenfällt. Das von beiden Parabeln eingeschlossene Flächenstück ist zu berechnen!
Berechnen Sie auch das Volumen des entstehenden Rotationskörpers, wenn sich das Flächenstück um die x-Achse dreht.

6.) Ein Wasserbehälter soll aus einem geraden Zylinder mit einem kegelförmigen Boden bestehen. Welche Höhe muss der Zylinder, welche Höhe der Kegel erhalten, wenn der Behälter $2000 m^3$ fassen und der Achsenschnitt des Kegels an der Spitze einen Winkel von $160°$ haben soll; bei geringst möglicher Oberfläche? Wie groß wird diese minimalste Oberfläche, wie groß der Radius des Grundkreises?

7.) Vom Nebenscheitel C der Ellipse E: $x^2 + 4y^2 = 144$ aus sind jene Sehnen zu ziehen, die möglichst lang sind.

a.) Berechnen Sie die Koordinaten der Endpunkte der beiden möglichen Sehnen und ermitteln Sie die Sehnenlänge.
b.) Ermitteln Sie die Flächeninhalte der drei so entstehenden Ellipsenteile.

8.) Das Parabelsegment, das die Gerade $x=9$ von der Parabel $y^2 = 3x$ abschneidet, dreht sich um die x-Achse.
Dem entstehenden Drehparaboloid wird der Drehkegel von kleinstem Volumen umgeschrieben. Dieser Kegel berührt das Paraboloid längs eines Kreises.
Man berechne das Verhältnis der Rauminhalte der Körper, in die das Paraboloid durch die Ebene des Berührkreises geteilt wird!

9.)Gegeben ist die Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$; eine Hyperbel in Hauptlage hat die gleiche Nebenachse.

Wie groß muss die Hauptachse der Hyperbel gewählt werden, damit der Inhalt des durch die vier Schnittpunkte der beiden Kurven bestimmten Rechtecks möglichst groß wird?
Bei Drehung um die x-Achse entstehen 3 Volumsteile. Berechne diese!

10.) In dem im ersten Quadranten gelegenen Punkt der Ellipse E: $x^2 + 4y^2 = 9$, der vom unteren Nebenscheitel den größten Abstand hat, werden Tangente und Normale errichtet. Der Flächeninhalt des Vierecks, welches von diesen beiden Geraden und den Koordinatenachsen gebildet wird, ist zu berechnen.

11.) Die Ellipse E: $4x^2 + 9y^2 = 324$ rotiert um die x-Achse. Dem Ellipsoid ist ein volumsgrößter Kegel so einzuschreiben, dass seine Spitze im linken Hauptscheitel liegt.

Man berechne das Volumen des Kegels und das Verhältnis zum Volumen des Ellipsoids.

12.) Die Schnittpunkte A und B der Parabel $y^2 = 4x$ mit der Geraden $2x - 3y = 8$ sind Eckpunkte eines Dreiecks ABC. Der dritte Eckpunkt C des Dreiecks liegt auf dem Parabelbogen zwischen A und B.

Für welche Lage von C ist der Dreiecksinhalt ein Maximum?
In welchem Verhältnis steht die Fläche des Dreiecks zur Fläche des Parabelsegmentes?

13.) Das Segment, das die x-Achse von der Parabel P: $y = 8 - x^2$ abschneidet, rotiert um die y-Achse.
Dem entstehenden Drehparaboloid wird der Drehzylinder von größtem Volumen derart eingeschrieben, dass der Basiskreis auf der x-Achse liegt.

In welchem Verhältnis stehen Zylindervolumen und Paraboloid?

14.) Die Hyperbel H: $4x^2 - 25y^2 = 100$ wird durch die Gerade $x = 11$ geschnitten. Dem entstehenden Hyperbelabschnitt, der um die x-Achse rotiert, ist ein Drehzylinder mit maximalem Volumen einzuschreiben, sodass die Spitze auf der Geraden liegt.

Berechnen Sie das Volumsverhältnis von Kegel und Hyperboloidabschnitt!

15.) Gegeben ist die Parabel mit der Funktionsgleichung $y = \frac{x^2}{6} - 6$

Das unter der x-Achse liegende Parabelsegment rotiert um die y-Achse. Diesem Paraboloidstumpf ist ein Drehzylinder mit maximalem Volumen koaxial einzuschreiben.

Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina beider Körper.

16.) Gegeben sind die Parabeln P1: $y^2 = 3x$ und P2: $x^2 = 3y$

a.) Berechne den Schnittpunkt der beiden Kurven
b.) Dem gemeinsamen eingeschlossenen Flächenstück ist ein Dreieck maximaler Fläche so einzuschreiben, dass ein Eckpunkt der Schnittpunkt (0/0) ist und die beiden anderen jeweils auf einer der beiden Kurven liegen

17.) Die Parabel $y^2 = 16x$ wird von der Geraden $2x - y = 16$ geschnitten.

Dem entstehenden Parabelsegment soll ein Dreieck mit größtem Umfang so eingeschrieben werden, dass eine Dreiecksseite die Parabelsehne ist.
In den Eckpunkten dieses Dreiecks werden die Tangenten gelegt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Tangenten gebildeten Dreiecks.

18.) Gegeben ist die Ellipse E: $3x^2 + 12y^2 = 48$

a.) Berechnen Sie das Volumen des Drehellipsoids bei Drehung um die x-Achse
b.) Der Ellipse soll ein Rechteck eingeschrieben werden, sodass bei Drehung um die y-Achse das Volumen des entstehenden Drehzylinders möglichst groß wird.
In welchem Verhältnis steht das Zylindervolumen zum entstehenden Ellipsoid.

19.) Gegeben sind die Hyperbel H: $x^2 - 5y^2 = 20$ und die Parabel P: $y^2 = \frac{x}{5}$

a.) Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel
b.) Das gemeinsam eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Dem entstehenden Rotationskörper soll ein Zylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Berechnen Sie das Volumen des Zylinders!

20.) Der Ellipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ dreht sich um die x-Achse. Dem Drehellipsoid soll ein koaxialer Drehzylinder so einbeschrieben werden, dass die Mantelfläche möglichst groß wird.

Wie verhält sich das Volumen des Ellipsoids zum Volumen des Zylinders?

21.) Gegeben sind die beiden Halbellipsen E1: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ mit y¤ 0

und E2: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} = 1$ y● 0

Beide Halbellipsen rotieren um die y-Achse.
Diesem Drehkörper soll ein Drehzylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Berechnen Sie das Volumsverhältnis von Zylinder und Rotationskörper!

22.)Integration durch Potenzreihenentwicklung

a.) $\int_{0,200}^{0,850} e^x \sin x dx =$

b.) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx =$

c.) $\int_0^x e^{-x^2} dx =$

d.) $\int_0^{0,655} \sqrt{1 + x^3} dx =$

e.) $\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} =$ (arctanx) Setze x=1

Lösungen:

1.) a.) Schnittpunkte : $S(5/ \pm\sqrt{15})$
Fläche: 41,3 FE

b.) Zylinder: h=4 , $r=\sqrt{\frac{15}{2}}$

Verhältnis: 1:2

2.) Schnittpunkte: S(24/-24), T(6/12)

Tangenten: y=x+6 und y= -1/2x -12

Tangentenschnittpunkt: R(-12/-6)

Fläche: 162 FE

Extremwertaufgabe: Q(1,5/-6)

3.) a.) Schnittpunkte: S(4/5), T(-2/-1)
Fläche: 18 FE

b.) $P(1/ -\frac{5}{2})$

4.) Höhe= 2, Radius=$2\sqrt{2}$

Volumsverhältnis: 2:1

Flächen: 7,54 FE, 1,24FE, 1,24FE

5.) Q(2/1)
k2: $y^2 = \frac{1}{2} \cdot x$
A= 2/3

6.) O = 639,219 m²

r = 9,386 m

7.) a.) $P(\pm 8 \cdot \sqrt{2} / -2)$

b.) 34,84 cm² , 156,51cm²

8.) Verhältnis 1:3

9.) H: $4x^2 - 3y^2 = 12$

10.) $A = \frac{39}{8}\sqrt{2}$

11.) VK = 128□ Vell=432π

12.) [illegible] / 3 [illegible] Verhältnis: 1:15

13.) Verhältnis 2:1

14.) Verhältnis 2:1

15.) $r = 3\sqrt{2}$

h= 3

V(Zylinder) = 54□

V(Zylinder):V(Paraboloid) = 1 : 2

16.) S1(0/0), S(3/3)
A=0,73 FE

17.)S1(16/16), S2(4/-8)
T(-8/4)
A(Dreieck) = 216
Tangenten: y=0,5x+8 und y=-x-4

18.)a.) 67,02 VE
b.) 76,79 VE
Vz:Ve=1:4/3

19.)a.)S1(5/1) 39,29°
S2(5/-1)

b.) 3,15VE

20.)75,39
Vz:Ve=1 :1,7

21.) $r = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$

$h = y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$

V(Zylinder) = 362,759

Volumsverhältnis: $1 : \frac{\sqrt{3}}{3}$

22.) a.)
Anleitung: Reihe für e^x und sinx multiplizieren
Lösung: 0,584
(Reihe: $x^2/2+x^3/3+x^4/12-x^6/180-x^7/630-.....$)

b.)0,946

c.)Reihe:
$x-x^3/3 +x^5/(5*2!) - x^7/(7*3!) + x^9/(9*4!)-+.......$

Lösung: 0,747 (für Grenzen 0 und 1)

d.)0,677

e.)Arctan x = $x - x^3/3+ x^5/5 - x^7/7$ +-

V.)TRIGONOMETRIE

1.) Um die Höhe eines Kirchturmes zu bestimmen wird auf einem 32° zur Horizontalen geneigten Hang eine Standlinie AB = 60m festgelegt, die mit dem Turm in einer Vertikalebene liegt.
Von A aus werden ein Höhenwinkel von 27,3° zur Kirchturmspitze, sowie ein Tiefenwinkel von 15,5° zum Fußpunkt gemessen.
Von B aus wird nur der Höhenwinkel 52,7° bestimmt.

a.) Lösen Sie die Aufgabe konstruktiv (M: 1:1000)
b.) Berechnen Sie die Höhe des Kirchturmes und die Entfernung des Standortes B zum Kirchturm.

2.) Den Schiefen Turm zu Pisa, der in Richtung des Beobachters geneigt ist, sieht man aus einer Entfernung von 150m zum Fußpunkt des Turmes unter 20,73°. Nähert man sich dem Turm um 56,8m im ebenen Gelände, so erscheint er unter dem Winkel von 32°.

a.) Lösen Sie die Aufgabe konstruktiv
b.) Berechnen Sie die Höhe des Turmes, den Überhang in Meter sowie die Winkelabweichung vom Lot.

3.)Ein Eisenbahndamm ist aufzuschütten. Es sollen die Kronenbreite 10m, der Böschungswinkel 30° betragen. Da die Dammschüttung parallel zu den Höhenlinien des Geländes verläuft, hat die Dammsohle eine Querneigung von 12° . Die Dammhöhe h_2 beträgt 1,60m. Berechnen Sie

a.) die Dammhöhe h_1
b.) die Länge der Böschungsfallinien AD und BC
c.) die Breite AB der Dammsohle

4.) Bei der Hängebrücke über den Inn in Stams (Seehöhe 671m) wurde zum Kirchturm Locherboden der Höhenwinkel ♋ = 8,3° gemessen; geht man 60m in Richtung Locherboden auf einem 2,1° ansteigenden Waldweg weiter, so mißt man den Höhenwinkel ♌ = 8,6°.

a.) Wie hoch steht der Kirchturm Locherboden über dem Meeresspiegel?
b.) Wie groß ist die Kartenentfernung zwischen der Hängebrücke und der Kirche?

5.) Von einem Berg herab sieht man zwei in einer Ebene liegende Orte A und B unter den Tiefenwinkeln ♋ = 69° und ♌ = 28,5° und ihre bekannte Entfernung von 2500m unter dem Sehwinkel ♑ = 32,5°. Wie hoch ist der Beobachtungspunkt und wie weit sind A und B von ihm entfernt?

6.) Von einem Viereck sind gegeben: a= 736,42m ; b= 1261,40m; Winkel(ABC)=122°11´14“ ;Winkel (ADB)=33°46´18“ und Winkel(BDC)=42°23´56“.

Berechnen Sie die übrigen Seiten und Winkel!

7.) Zwei in derselben Horizontalebene liegende Orte O_1 und O_2 sollen durch eine geradlinige Eisenbahnstrecke verbunden werden. Zwischen O_1 und O_2 befindet sich ein Berg, so dass die Gerade O_1O_2 nicht direkt abgesteckt werden kann. Es wird ein Hilfspunkt P gewählt; die Strecken O_1P = 1830,0 m und O_2P = 1245,0 m sowie der Winkel O_1PO_2 = 108,6° werden gemessen. Von P aus können nun Anfang A und Ende E des Tunnels anvisiert werden. Man misst die Winkel O_1PA = 21,75° und EPO_2 = 24,3°.

Man berechne die Länge des Tunnels!

8.) Es soll die Höhe des Berggipfels A über dem Punkt B bestimmt werden.
Da A von B aus nicht zu sehen ist, werden in einem 26,22m tiefer als B liegenden Punkte C die Höhenwinkel 41,55° nach A und 23,28° nach B gemessen. Ferner bestimmt man in dem Punkte D, der mit A, B und C in einer Vertikalebene liegt und sich 16,55m tiefer als C befindet, die Höhenwinkel 25,98° nach A und 10,19° nach C.
Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen A und B!

9.) In einer Ebene ist gegen die Spitze einer und ♏ = 85° emporsteigenden Felswand eine horizontale Standlinie AB = 200m abgesteckt. In derselben Vertikalebene befindet sich in der Wand eine rastende Bergsteigergruppe, die von B aus unter einem Höhenwinkel ♑ = 57° erscheint. Die Wandspitze erscheint von den Endpunkten der Standlinie unter den Höhenwinkeln ♋ = 58,58° und ♌ = 65,2°.

Wie weit haben die Bergsteiger noch bis zur Spitze?
Wie hoch liegt die Spitze über der Ebene?
10.) Von zwei 12,0m vertikal übereinanderliegenden Öffnungen eines Turmes visiert man nach dem Fußpunkt und der Spitze eines Baumes, der mit dem Turm auf der selben Horizontalebene aufsteht. Von der oberen Öffnung ergeben sich die Tiefenwinkel 42,6° und 32,2°, von der unteren Öffnung nach dem Fußpunkt des Baumes der Tiefenwinkel 35,1°.

Wie hoch ist der Baum?

11.)Von einem Punkt B aus, der auf einem gleichmäßig unter 36,3° zu einem Fluß abfallenden Hang liegt, sieht man ein auf dem jenseitigen Hang liegendes Gehöft unter dem Höhenwinkel von 15,9°, in der gleichen Vertikalebene das jenseitige Ufer unter dem Tiefenwinkel 22,8°. Geht man von B senkrecht zum Ufer 20,0m hinab, so sieht man das Gehöft und das Ufer unter den Winkeln 27,9° und 13,3°.

Wie hoch liegt das Gehöft über dem Wasserspiegel des Flusses?

12.)Von einem Punkt P eines unter dem Winkel 3,75° ansteigenden Tales sieht man den Berggipfel D über den Berggipfel C um 2,25° emporragen. Der Höhenwinkel des Gipfels C wird in diesem Punkt mit 9,4° gemessen. Geht man um 2300 näher, so deckt der Gipfel C gerade den Gipfel D. Beide Gipfel sieht man dann unter dem Höhenwinkel von 15,62°.

Wie hoch ist der Höhenunterschied der beiden Berggipfel?

Lösungen:

1.) a.)98m

b.) Höhe=98,2 m

Entfernung: 72,9m

2.)a.) Höhe 54,52m

Überhang 5,95m

Winkelabweichung 6,23m

3.) a.) 2,13m

b.) AD=11,81m

BC=2,34m

c.) 22,77m

4.) a.) Seehöhe: 858m

b.) Kartenentfernung: 1283m

5.) h= 1888m

x=2022mm

y=3957m

Ansatz: $2500^2=x^2+y^2-2xy\cos(\gamma)$

6.) c=1819,99

d=427,26

34°13´44“

127°24´38“

76,171°

7.)1077,8m

8.)Ax=36,68m

9.) 450m zur Spitze

Höhenunterschied: 1340m

10.) 16m

11.) 42,2m

12.) 667m

VI.)WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE

1.)Bei Automotoren der Marke Vilglyk wurden folgende Meßwerte der Lebensdauer in km ermittelt:

150.000	135.000	145.000	152.000	148.000	134.000
154.000	160.000	163.000	143.000	145.000	128.000
165.000	150.000	143.000	152.000	154.000	131.000

a.) Berechnen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung

b.) Wieviel Prozent der erzeugten Motoren haben eine Lebensdauer von mindestens 150.000 km unter der Annahme einer Gaußverteilung?

c.) Bei Wieviel Prozent der Motoren weicht die Lebensdauer um mehr als 18.000km vom Mittelwert ab?

d.) Auf wieviel km muss durch Verbesserung des Motors seine mittlere Lebensdauer erhöht werden, damit mindestens 98% der Motoren 140.000km laufen?

2.) Mutter und Tochter tragen eine Serie von Tennisspielen aus. In der Regel gewinnt die Tochter 40% der Spiele. Es werden 13 Partien gespielt.

a.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt die Tochter die Mehrzahl?

b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter mindestens ein Spiel gewinnt?

c.) Wieviel Spiele müsste die Tochter mindestens gewinnen, damit man bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% sagen könnte, sie sei besser geworden?

d.) Zeichnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X (X sei die Anzahl der von der Tochter gewonnenen Spiele)

e.) Berechne Beispiel b.) mit der Gaußverteilung. Wie ist eine so große Abweichung der beiden Ergebnisse zu erklären?

3.)Intelligenztests zur Ermittlung des Intelligenzquotienten werden im allgemeinen so zusammengestellt, dass der Intelligenzquotient Q, aufgefasst als eine Zufallsvariable bei zufälliger Auswahl einer (erwachsenen) Person aus der Bevölkerung, annähernd normalverteilt ist mit dem Mittelwert 100 und der Standardabweichung 15.

a.) Wieviel Prozent besitzen einen Intelligenzquotienten zwischen 91 und 115 ?

b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person einen Intelligenzquotienten von mindestens 80 aufweist?

c.) Wieweit muss man eine Abweichung vom Mittelwert zulassen, damit 97% der zufällig ausgewählten Personen erfasst werden?

d.) Berechne Beispiel a.) unter Berechnung des Integrals durch Potenzreihenentwicklung

4.)a.) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Wendetangenten für die Gauß´sche Glockenkurve

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

b.) Eine Messserie zur Bestimmung der Brenndauer von Glühbirnen ergab folgendes Bild:

1530h, 1600h, 1595h, 1651h, 1643h, 1559h, 1605h, 1625h, 1588h, 1587h.

Berechnen Sie den Mittelwert und die Streuung für diese Messdaten!

c.)Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Brenndauer einer beliebigen Glühbirne zwischen 1600h und 1700h liegt?

d.)Welche Toleranzgröße müsste man setzen, wenn man nur 5% als Ausschuss ausscheiden will?

5.) Auf einer Hühnerfarm werden Eier produziert, deren Masse erfahrungsgemäß normalverteilt ist. Der Mittelwert beträgt 60g; die Standardabweichung wurde mit 8,5g ermittelt.

a.) Eier, deren Masse größer als 80g oder kleiner als 50g ist, müssen aussortiert werden. Wieviel Prozent der Produktion sind davon betroffen?

b.) Bei der automatischen Verpackung der Eier werden 3,5% beschädigt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass auf einem Tablett mit 30 Eiern höchstens zwei beschädigt sind?

6.) Hans ist ein Charmeur: Zwei Drittel seiner Ansprechversuche bei Mädchen gelingen (was das auch immer heißen mag). Hans führt 7 voneinander unabhängige Bernoulli-Versuche durch, als Zufallsvariable wird die Anzahl der nicht erfolgreichen Ansprechversuche gewählt.

a.) Stelle diese Binomialverteilung graphisch dar

b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei mindestens einem Mädchen Erfolg hat?

7.) Ein Beamter hat in seiner Lade 20 Kugelschreiber, von denen 7 Stück nicht funktionieren. Er entnimmt 5 Kugelschreiber gleichzeitig. Als Zufallsvariable X wird die Anzahl der entnommenen defekten Kugelschreiber gewählt.

Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung

Stelle die Binomialverteilung graphisch dar.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er keinen defekten erwischt?

8.) Bei einer Abfülleinrichtung für Vilglyk wurden folgende Messwerte ermittelt (in Liter):

1,006	1,005	0,990	0,999	1,000	0,959
1,003	0,997	0,999	0,989	1,011	1,002

a.) Berechne den Mittelwert und die Standardabweichung

b.) Wieviel Prozent der Flaschen liegen zwischen 0,950 l und 1,020 l ?

c.) Welche Abweichung vom Mittelwert muss man zulassen, damit 99% erfasst werden?

d.) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Wert größer als 1,100 Liter zu erwarten?

9.) Die Brenndauer von Glühbirnen sei nach Gauß verteilt und besitze den Mittelwert von 1800h und eine Standardabweichung von 200h.

a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Brenndauer einer beliebigen Glühbirne zwischen 2500 und 3999 Stunden liegt?

b.) Welche Toleranzgröße müsste man setzen, wenn man nur 5% als Ausschuss ausscheiden will?

10.) Herr Blödsinn behauptet, dass die Mannschaft Antikick (kurz A genannt) gegen die Mannschaft Babykick (kurz B) 30% der Spiele nicht gewinnt. Es werden 10 Spiele gemacht.

a.) Wähle als Zufallsvariable, die von A gewonnen Spiele und stelle die Binomialverteilung graphisch dar.

b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A mindestens 3 Spiele nicht gewinnt?

c.) Bei 10 Spielen gewinnt A mindestens 9. Ist A besser geworden bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% ?

11.) Angenommen, die Masse von Hühnereiern sei normalverteilt mit einem Mittelwert von 60g und einer Standardabweichung von 15g. Eier, die weniger als 45g wiegen, sollen als „klein“ bezeichnet werden. Die übrigen werden in „standard“ und „groß“ unterteilt, und zwar so, dass der Anteil der beiden gleich ist.

a.)Wie groß ist der Anteil der „kleinen“ Eier?

b.)Bei welcher Masse muss die Grenze zwischen „standard“ und „groß“ festgesetzt werden?

12.) Bei Antritt des Grundwehrdienstes wird unter anderem die Körpergröße der jungen Soldaten festgestellt. Wir wollen annehmen, dass die Körpergröße normalverteilt ist und ein Mittelwert von 178,6cm und eine Standardabweichung von 7,5cm bestimmt wurde.

a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener kleiner als 172cm ist ?

b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Grundwehrdiener zwischen 175 und 181 cm liegt?

c.) Kleinwüchsige und Riesen werden als untauglich erklärt. Wo müssen die Grenzen gesetzt werden, damit 98% als „tauglich nach der Größe“ aufscheinen?

13.) Herr Maier behauptet, dass ¾ der Autofahrer ihre Sicherheitsgurte nicht angelegt haben.

a.) Es werden 8 vorbeifahrende Autos beobachtet. Bestimme die Binomialverteilung für die die Zufallsvariable X=die Anzahl der nicht angegurteten Fahrer.

b.) Welche Entscheidungsregel muss man aufstellen, damit man mit 5% Irrtumswahrscheinlichkeit behaupten kann, dass weniger als ¾ der Autofahrer die Gurte nicht anlegen?

c.) Bei einer großangelegten Kontrolle wurden 1000 Autofahrer überprüft. Wie groß sind die Abweichungen vom Mittelwert zuzulassen, dass die Behauptung mit 95% richtig ist?

14.)Ein pharmazeutischer Betrieb benötigt für das Abfüllen von Proben Flaschen, deren Masse 250g beträgt, wobei eine Toleranz von +11% zulässig ist. Die mit der Lieferung beauftragte Firma muss zur richtigen Kalkulation des Preises die ungefähre Größe des Ausschusses bei der Produktion kennen. Zu dessen Ermittlung wird bei der Aufnahme der Produktion eine Stichprobe von 20 Flaschen entnommen und deren Masse bestimmt (in Gramm):

251	252	254	249	250	248	248
252	254	250	250	247	250	253
250	249	248	251	251	252	

a.)Welcher Ausschuß ist zu erwarten, wenn angenommen werden kann, dass die Masse der Flaschen annähernd normalverteilt ist, wobei der Mittelwert und Standardabweichung in der Grundgesamtheit und in der Stichprobe identisch sein sollen.

b.)Wie hoch sind die Kosten für 100 reguläre Flaschen, wenn die Gestehungskosten für 100 Flaschen (regulär oder Ausschuß) S 39,00 betragen?

c.)Welche Bedingung (Qualitätssteigerung) müsste man fordern, damit 90% der Flaschen regulär sind und wieviel würde man sich bei einem Auftragsvolumen von 1 Million Flaschen ersparen?

15.) Eine Münze wird 2000mal geworfen. Es ist die Wahrscheinlichkeit anzugeben, dass Kopf
a.) weniger als 950mal

b.) 950-1050mal

c.)920 bis 1080mal geworfen wird.

d.) Es besteht der Verdacht, dass die Münze gezinkt ist. Dazu wird bei einer Stichprobe von 100 Würfen 60mal Kopf gezählt. Ist eine signifikante(hochsignifikante) Abweichung von der Normalverteilung zu erkennen?

16.)Ein Würfel wird 1000mal geworfen. Es erscheint 210mal die Sechs. Ist das Ergebnis für die Behauptung, dass der Würfel falsch ist, signifikant

a.) auf dem 5%-Niveau?

b.) auf dem 1%-Niveau?

17.)Eine bestimmte Krankheit hat die die Sterblichkeit von 16%. Von 300 Tabakarbeitern starben an ihr 62. Haben Tabakarbeiter eine überdurchschnittliche Anfälligkeit gegen diese Krankheit, d.h. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zufällig eine so große Abweichung nach oben zustande kommt?

18.) In einem Wahlkreis werden 600 Wahlberechtigte hinsichtlich ihres beabsichtigten Wahlverhaltens befragt, von denen sich 32 für die Partei Mathepro entscheiden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann prognostiziert werden, ob diese Partei die 5% Hürde überspringen wird?

<u>Lösungen:</u>

1.)a.) Mittelwert: 147333km

Standardabweichung: 9741km

10230

b.) 39,24%

c.) 93,54%

d.) größer als 159 998km

2.)a.) 22,89%

b.)99,87%

c.) P(X>=9)=3,21%

d.) Selber

3.)a.) 56,7%

b.) 90,1%

c.) +- 32,55

4.)a.) S(0/2)

b.) Mittelwert=1598,3
♦ = 34,63
48,2%
deltax=67,9

5.) a.) 13,0%

b.) 92,0%

6.)a.)
b.) 99,95%
7.)Mittelwert: 1,75
Standardabweichung: 1,0655
P(X=0)=11,6%

8.)a.) Mittelwert: 0,9966 Standardabweichung: 0,0128
b.) 96,54%
c.)3,3%
d.) 0%

9.)a.)0,0229%

b.) 124

10.)a.)0,17%
b.) P(X=10)=2,82%

11.)15,86%
68,25g

12.)a.) 18,94%

b.) 30,99%

c.) 196,08 cm
161,13 cm

13.)a.)

b.) Wenn höchstens drei Autofahrer nicht angegurtet sind

c.) x= Mittelwert+-26,89

14.) a.) regulär: 78,04%

b.) 5000 ATS

c.)

15.)a.)1,02%
b.) 97,85%
c.) 99,97%
d.)

16.)a.)0,015%
b.) ja

17.) 0,91% ja

18.) 64%